EXERCICE 1

1/ $f([0,1[) = [0;-\infty[$

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 0$

3/ La droite (AB) : $y = 2x - \frac{1}{2}$ est l'asymptote à C_f (courbe de f) au voisinage de $+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - \left(2x - \frac{1}{2}\right)\right) = 0$.

. C_f est au dessous de son asymptote D:y=$-\frac{3}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x) - \left(-\frac{3}{2}\right)} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$.

4/ Soit $(a,b) \in (]-2;1[)^2$ tel que $a < b$

donc $-a > -b$ et $f(a) > f(b)$ (car f est décroissante sur $]-2;1[$)

alors $f(a) - a > f(b) - b$ c'est à dire $g(a) > g(b)$

Ce qui explique que g est décroissante sur $]-2;1[$.

EXERCICE 2

1/a) $\forall x > 0;\ f(x) + x = \sqrt{x^2+3} - 2x + x = \left(\sqrt{x^2+3} - x\right)\dfrac{\sqrt{x^2+3}+x}{\sqrt{x^2+3}+x}$

$$= \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt{x^2+3}+x} = \frac{3}{\sqrt{x^2+3}+x}$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-x)] = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x^2+3}+x} = 0$

Donc la droite Δ : $y = -x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

2/ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{m^2x^2+1}{x^2-4x-5}$

Premier cas: $m = 0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^2-4x-5} = 0$

Donc la droite D:y=0 est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$

Deuxième cas: $m \neq 0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{m^2x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} (m^2) = m^2$.

Donc la droite D:y=m^2 est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.

3/ $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}} = +\infty$

Donc f n'a pas une limite réelle en (-1) alors elle n'est pas prolongeable par continuité en (-1).

4/ . $f(1) = \sqrt{\dfrac{1-1}{1+1}} = 0.$

. $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \left(\sqrt{x^2+3} - 2x\right) = 0 = f(1)$

. $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}} = 0 = f(1)$

Conclusion : f est continue en 1.

5/a- $\forall x \in]-1;1];\ -1 + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{-(x+1)+2}{x+1} = \dfrac{1-x}{x+1}.$

b- $-1 < a < b \leqslant 1 \Rightarrow 0 < a+1 < b+1 < 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{b+1} < \frac{1}{a+1}$$

$$\Rightarrow 1 \leqslant \frac{2}{b+1} < \frac{2}{a+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant -1 + \frac{2}{b+1} < -1 + \frac{2}{a+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \frac{1-b}{1+b} < \frac{1-a}{1+a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1-b}{1+b}} < \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$$

$$\Rightarrow f(b) < f(a)$$

Conclusion f est strictement décroissante sur $]-1;1]$.

c- Soit $(a,b) \in (]-1;1])^2$ tel que $a < b$

alors $-a > -b$ et $f(a) > f(b)$

Donc $f(a) - a > f(b) - b$ signie que $g(a) > g(b)$

D'où g est strictement décroissante sur $]-1;1]$.

. $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}} - x\right) = +\infty$

D'où le tableau de variation de g

x	-1	1
g(x)	$+\infty$ ↘	-1

6/a- $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

b- ◊ g est strictement décroissante sur $]-1,\frac{1}{2}]$

donc $\forall x \in]-1;\frac{1}{2}];\ g(x) \geqslant g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} = 0.07735 > 0$

alors l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]-1;\frac{1}{2}]$

C'est à dire l'équation $f(x) = x$ n'a pas de solution dans $]-1;\frac{1}{2}]$.

♦ g est continue , strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2},1\right]$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)g(1) < 0$

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α dans $\left[\frac{1}{2},1\right]$.

signifie que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $\left[\frac{1}{2},1\right]$

Bilan: ◊ et ♦ donnent que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $]-1,1]$.

c) $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1-\alpha}{\alpha+1}} = \alpha \Leftrightarrow \alpha^2 = \dfrac{1-\alpha}{\alpha+1}$

$$\Leftrightarrow \alpha^2(\alpha+1) = 1-\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha = 1$$

EXERCICE 3

1) $\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)}\ [2\pi]$

$$\equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$
$$\equiv \frac{5\pi}{6}\ [2\pi].$$

. $\widehat{\left(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BA}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)}\ [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ car BRSC est un carré direct

$$\equiv \frac{7\pi}{12}\ [2\pi].$$

2)a- $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)$ est un angle orienté inscrit dans Γ qui intersepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$

$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est un angle orienté au centre de Γ qui intersepte l'arc $\overset{\frown}{BC}$

Donc $\widehat{\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)} \equiv \frac{1}{2}\widehat{\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi].$

b- $\widehat{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \widehat{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}\right)} - \widehat{\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

(car DAC est un triangle direct, isocèle et rectangle en A)

$\equiv \frac{\pi}{12} \quad [2\pi].$

3/ $\widehat{\left(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BD}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BA}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{7\pi}{12} - \widehat{\left(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \frac{7\pi}{12} - \widehat{\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)} \quad [2\pi]$ car ABD est isocèle en A.

$\equiv \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \quad [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

D'où $(BS) \perp (BD)$.

4/ $M \in E \Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{MC},\overrightarrow{MB}\right)} \equiv -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)} \equiv \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow \widehat{\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}\right)} \quad [2\pi]$

$\Leftrightarrow M \in \overset{\frown}{CB} \setminus \{C;B\}$ avec $\overset{\frown}{CB} \subset \Gamma$

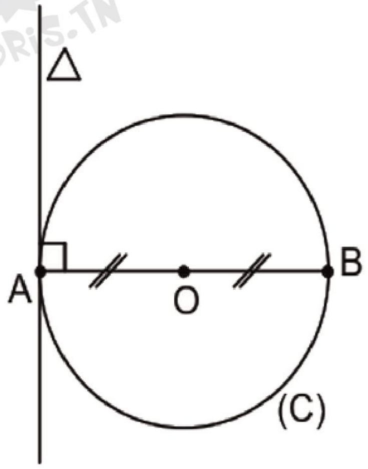
Conclusion :

L'ensemble E est l'arc orienté $\overset{\frown}{CB}$ de Γ privé des point C et B.

EXERCICE 4 (4 points)

Choisir la bonne proposition.

Dans le plan P orienté dans le sens direct on considère la figure ci-dessous: (C) est le cercle de diamètre [AB], Δ est la perpendiculaire à (AB) en A.



$E=\{M\in P$ /	[AB)\{A}	[AB]\{A, B}	[AB)	$\overset{\frown}{BA}$ \{A, B}	(C)\{A, B}	Δ
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=0\}$						✓
$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=AM\times AB\}$			✓			
$\widehat{(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})}\equiv 0\ [2\pi]\}$	✓					
$\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}\equiv \pi\ [2\pi]\}$		✓				
$\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\}$				✓		
$\widehat{(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB})}=\frac{\pi}{2}+k\pi;$ avec $k\in\mathbb{Z}\}$					✓	